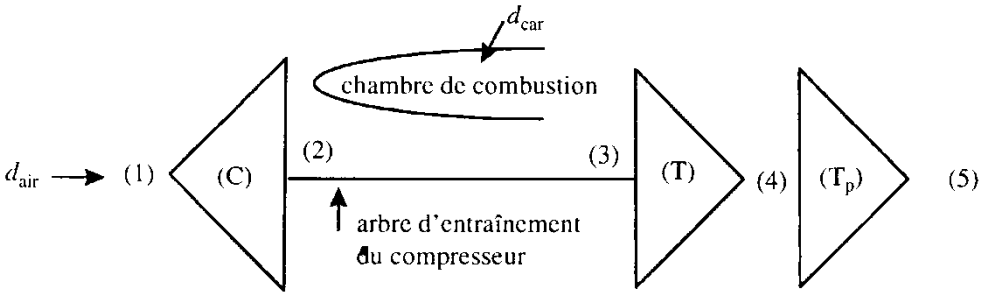
Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées sous réserve des conditions définies dans la circulaire n°86-228 du 28 juillet 1986.

PARTIE A

L'objet de ce problème est l'étude simplifiée d'un moteur de type « turbine à gaz » , utilisé pour entraîner le rotor d'un hélicoptère, l'hélice d'un navire, les roues d'une locomotive ou encore un alternateur électrique.

On se placera dans tout le problème dans l'hypothèse d'un régime permanent.

Ce moteur est constitué d'un compresseur (C) portant l'air extérieur des conditions (1) (pression p_1 température T_1) aux conditions (2) (p_2 T_2). Ce compresseur est suivi d'une chambre de combustion où l'oxygène contenu dans l'air (partiellement ou en totalité) sert à la combustion d'un carburant, le kérosène. Le mélange gazeux obtenu en sortie de la chambre de combustion aux conditions (3) (p_3, T_3) est détendu dans une turbine (T) des conditions (3) aux conditions (4) (P_4, T_4) ; la puissance mécanique obtenue lors de cette détente sert entièrement à entraîner le compresseur précédent. En sortie de cette turbine, on dispose de gaz sous pression aux conditions (4) qui sont à leur tour détendus dans une autre turbine appelée turbine de puissance (T_p) jusqu'aux conditions (5) (p_5, T_5) . La puissance mécanique disponible dans la turbine de puissance sert à l'utilisation définie au début du problème. Ces différentes transformations sont notées dans le schéma simplifié ci-dessous.



La machine absorbe un débit massique d'air noté d_{air} ; dans la chambre de combustion est injecté un débit massique de carburant noté d_{car} .

I. Température et pression en différents points (l'annexe définit par un schéma le système global)

I.1 Dans tout le problème les fluides mis en jeu dans les différents composants (compresseur, chambre de combustion, turbine, turbine de puissance) subissent un transvasement simple considéré comme adiabatique.

Quelle est la propriété du débit massique en régime permanent au niveau de chaque composant ?

On se propose de montrer que dans ces conditions le travail " utile " échangé par le fluide dans chaque composant avec les parties mobiles de la machine est égal à la variation d'enthalpie entre la sortie et l'entrée des gaz intervenant dans chaque composant (on négligera les variations d'énergie cinétique et d'énergie potentielle de pesanteur au niveau de ces quatre composants).

Pour cela établir qu'entre les conditions d'entrée (e) et les conditions de sortie (s) de chaque composant, il existe pour une masse unité de fluide la relation : $h(s)-h(e) = w_{(e)->(s)} + (p_s v_s - p_e v_e)$ (h est l'enthalpie massique, v le volume massique et w le travail massique total échangé par le fluide avec l'extérieur). Justifier que le second membre de cette égalité est bien le travail «utile » massique w_u.

I.2 Exprimer la puissance utile mise en jeu dans le compresseur $P_{u\,(1)->(2)}$, dans la turbine $P_{u\,(3)->(4)}$ et dans la turbine de puissance en fonction de la température du fluide gazeux aux différents points et des débits massiques en considérant que tous les mélanges gazeux sont assimilables à des gaz parfaits. Pour simplifier, on supposera que la capacité thermique massique à pression constante c_p a une valeur unique dans tous les composants même après la chambre de combustion ; le modèle obtenu sera donc simplifié par rapport à la réalité.

Quel est le signe de chacune de ces trois puissances ? Préciser le sens des échanges d'énergie, En supposant qu'il n'y ait aucune perte mécanique dans la liaison turbine - compresseur, relier les températures T_1 , T_2, T_3, T_4 aux débits d_{air} et d_{car} .

I.3 Dans la chambre de combustion la proportion des composants de l'air pur arrivant du compresseur est 1 mole de dioxygène O_2 , 3,7 moles de diazote N_2 et 0,05 mole d'argon Ar.
Cet air permet la combustion totale exothermique de kérosène (de formule C_xH_y avec x= 10 et y= 19,3) qui donne les gaz de combustion : dioxyde de carbone CO_2 , vapeur d'eau H_2O plus le diazote et l'argon non réactifs.
Le kérosène a un pouvoir calorifique noté P_{cal} égal à 43. 10^3 kJ. kg^{-1} (le pouvoir calorifique est l'énergie dégagée lors de la combustion au kérosène dans l'air). Ce pouvoir calorifique sera supposé constant.

3.1 Equilibrer l'équation chimique de combustion dans le cas où le carburant est brûlé sans excès d'air. Exprimer dans ces conditions le rapport de mélange appelé richesse : $\alpha = d_{car} / d_{air}$. Justifier que l'énergie thermique délivrée par la combustion de kérosène sert à échauffer les gaz de combustion de T_2 à T_3 . En déduire une relation liant α, T_2 , T_3 , P_{cal} et c_p (la transformation (2) -> (3) isobare).

Application numérique c_p = 1 kJ. $Kg^{-1}.K^{-1}$

Masses molaires atomiques (g,mol^{-1}) C : 12 H : 1 O : 16 N : 14 Ar : 40
Calculer α et T_3 sachant que t_2 = 250° C.

3.2 La technologie actuelle (métallurgie et refroidissement interne) ne permet pas de dépasser t_3 = 1300° C sous peine de casser par fluage la turbine : on introduit un excès d'air qui sert au refroidissement des gaz de combustion. En considérant que t_3 = 1300° C (vérifié ultérieurement) calculer la valeur réelle de α. Commentaire ? Déterminer alors T_4 sachant que t_1 = 25° C.

I.4 Les turbines de (3) à (4), et de (4) à (5) sont supposées être isentropiques, Pour simplifier, on prendra $\gamma = c_p / c_v$ = 1,4 , c_v étant la capacité thermique à volume constant. Calculer P_4 en prenant P_3 = 7 bar . Calculer T_5 sachant que P_5 = 1,7 bar. En déduire les valeurs de d_{air} et d_{car} . On rappelle que T(K) = 273+ T(°C).
La puissance mécanique disponible sur la turbine de puissance notée $P_{u\,(4)->(5)}$ sera prise égale à 5000 kW.

II. Evaluation des pertes dans le compresseur réel

II.1 Donner l'expression de la variation d'entropie ds de la masse unité de gaz parfait en fonction des paramètres R température T, pression P, de c_p et r = R / M (R : constante molaire des gaz parfaits et M masse molaire du gaz parfait).

La pression étant fixée, donner l'expression de s(p, T) connaissant s(p, T_1).
Montrer alors que dans un diagramme T = f(s), les isobares réversibles d'un gaz parfait sont des exponentielles de pente positive. En déduire que les isobares se déduisent l'une de l'autre par une translation que l'on précisera. En faire une illustration graphique.

II.2 La compression de l'air dans le compresseur est irréversible. On imagine la compression adiabatique sans irréversibilité de (1) (p_1, T_1) à (2s) (p_2, T_{2s}) avec $T_{2s} \neq T_2$.

2.1 Comment situez-vous T_{2s} par rapport à T_2 ?

2.2 Exprimer les puissances utiles $P_{u\,(1)->(2s)}$ et $P_{u\,(1)->(2)}$.
Comment situez-vous $P_{u\,(1)->(2s)}$ par rapport à $P_{u\,(1)->(2)}$?
On définit le rendement isentropique η_c du compresseur par $\eta_c = P_{u\,(1)->(2s)} / P_{u\,(1)->(2)}$

Exprimer η_c en fonction de T_1, T_2, p_1 , p_2 et γ.

2.3 Calculer numériquement η_c si t_1 = 25°C, t_2 = 250°C , p_1 = 1 bar , p_2 = 7 bar.

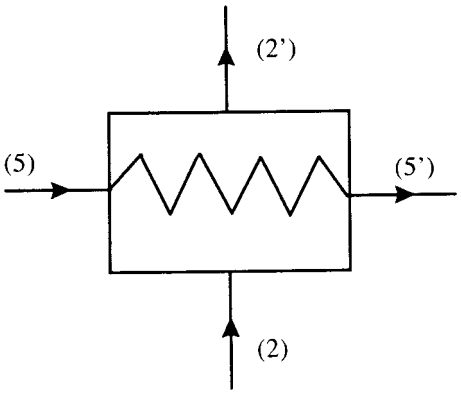
II.3

3.1 Exprimer r en fonction de c_p et γ. Le calculer numériquement. Calculer l'entropie massique aux différents points du cycle en posant $s_{(1)} = 0$ J. kg^{-1} K^{-1} . Tracer dans un diagramme T = f(s) l'allure des évolutions effectuées par l'unité de masse de fluide (y reporter également le point (2s)).

3.2 A quelle grandeur physique est homogène une aire dans le diagramme T = f(s) ?, Calculer l'aire sous-tendue par l'isobare p_2 entre les points (2s) et (2) (on assimilera pour ce calcul l'isobare p_2 entre les points (2s) et (2) au segment de droite (2s) (2)). Montrer qu'elle correspond à la variation d'enthalpie massique $h_2 - h_{2s}$ entre les états (2s) et (2). Que représente physiquement cette différence ? Calculer numériquement $P_{u\,(1)\to(2)} - P_{u\,(1)\to(2s)}$.

III. Echangeur de chaleur

Un échangeur de chaleur parfait (globalement adiabatique et sans travail utile) est traversé par les gaz de sortie de la turbine de puissance, ce qui permet de réchauffer une partie du débit d'air sortant du compresseur noté k. d_{air} ($0 < k < 1$) avant son entrée dans la chambre de combustion.



III.1 Les gaz sortant de la turbine avec un débit que l'on prendra égal à d_{air} passent des conditions (5) (p_5 , T_5) aux conditions (5') (p_5, $T_{5'}$) tandis que le débit k . d_{air} passe des conditions (2) (p_2 , T_2) aux conditions (2') (p_2 $T_{2'}$). Sachant que k = 0,2 et que $T_{5'} = T_5$ -70K, calculer $T_{2'}$.

III.2 Avant d'entrer dans la chambre de combustion, on mélange de façon adiabatique et sans travail utile un débit k . d_{air} aux conditions (2') et un débit (d_{air} - k . d_{air}) aux conditions (2), ce qui permet d'obtenir un débit d_{air} aux conditions (2") (p_2 , $T_{2''}$) à l'entrée de la chambre de combustion. Calculer $T_{2''}$.

III.3 Si T_3 garde la valeur précédente (t_3 = 1300°C), en déduire la nouvelle valeur de la richesse α'. Conclusion ?

IV. Adjonction d'une tuyère

Les gaz aux conditions (5') sont enfin envoyés dans une tuyère adiabatique. Une tuyère est un conduit rigide de section variable qui permet d'accélérer les gaz le traversant et donc de créer de la poussée. Cette tuyère échappe à la pression p_6 = 1 bar. Les gaz à l'entrée de la tuyère ont une vitesse négligeable. Par contre la vitesse V en sortie ne sera pas négligée. Donc, dans la tuyère on prendra en compte les variations d'énergie cinétique. Déterminer la relation liant les conditions d'entrée (5') ($T_{5'}$, $V_5 = 0$) aux conditions de sortie (6) (T_6 , V_6) . Sachant que V_6= 450 ms^{-1}, déterminer T_6. Calculer la variation d'entropie massique $s_6 - s_5'$. Commentaire ?

V. Rendement thermique

Le rendement global de cette machine appelé rendement thermique η peut être évalué par le rapport entre la puissance mécanique $P_{u\,(4)\to(5)}$ et la puissance consommée dans la chambre de combustion. Calculer η dans les deux cas : sans échangeur de chaleur et avec échangeur de chaleur. Conclure.

ANNEXE

Dessin de présentation

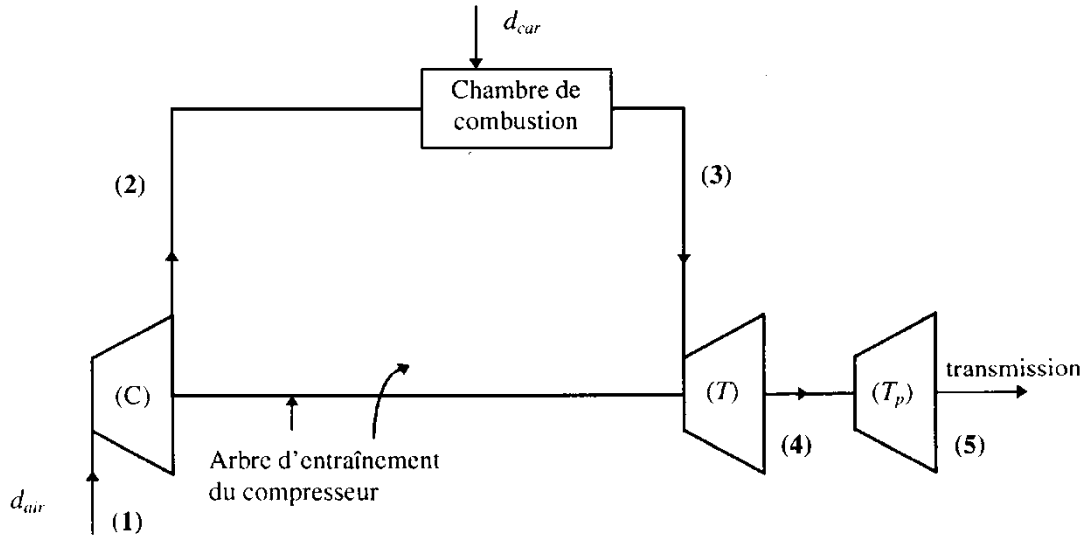
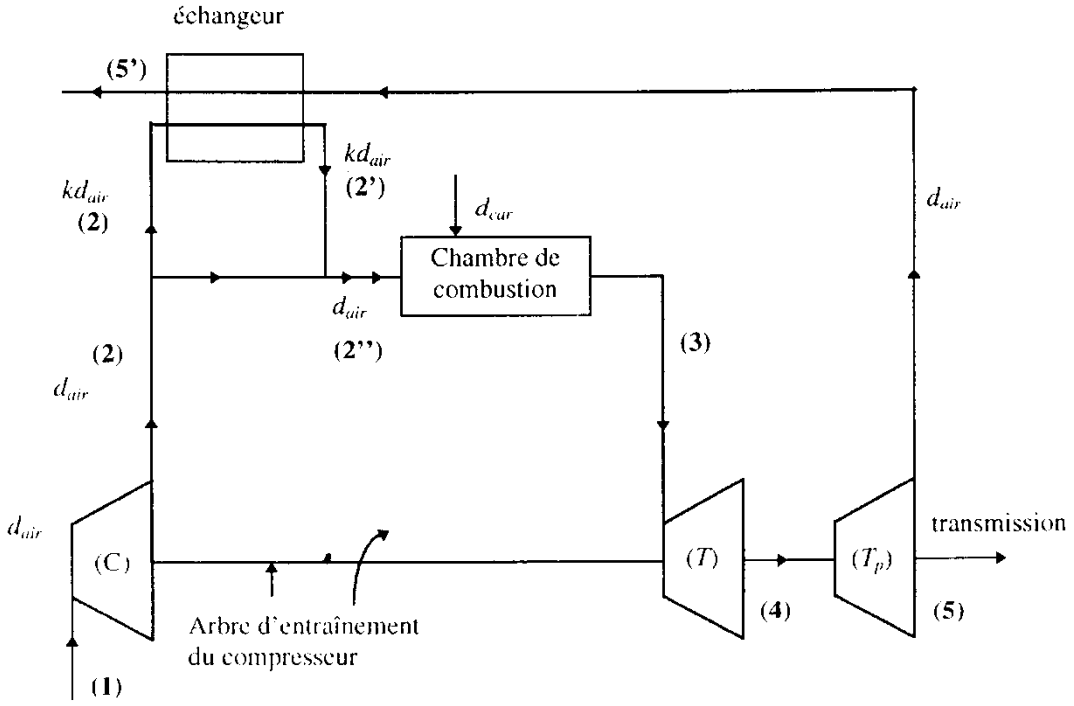
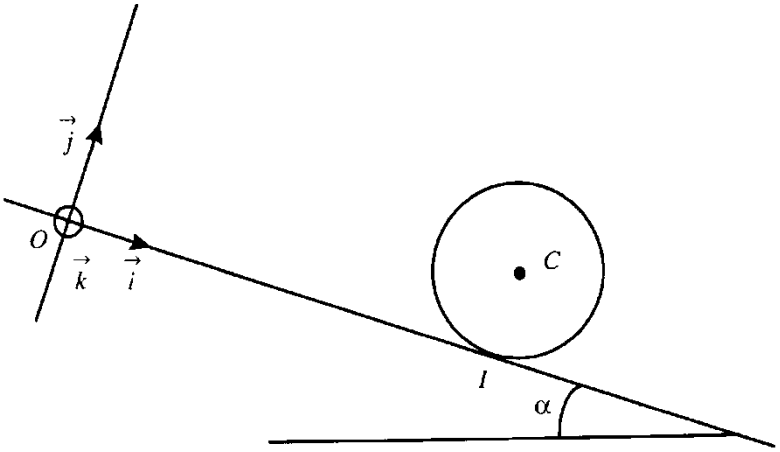


Schéma avec échangeur III



PARTIE B

On se propose d'étudier quelques mouvements d'un cerceau de masse m, modélisé par un cercle de centre C et de rayon R. Ces mouvements auront lieu dans le plan vertical O **i j** le long d'un plan incliné de longueur suffisante, faisant l'angle α avec l'horizontale, Le contact en l du cerceau et du plan incliné est toujours supposé réalisé, et il est caractérisé par un coefficient de frottement de glissement f (terme positif et constant). On posera **OI** = x **i** .



Dans tout le problème on raisonne dans le référentiel R_L. On note (O **i j k**) le repère lié à R_L supposé galiléen. On désignera par :
v = v **i** le vecteur vitesse de C,
ω = ω **k** le vecteur vitesse de rotation du cerceau,
V = V **i** le vecteur vitesse de glissement du cerceau par rapport au plan incliné,
$\mathbf{F_R}$ = T **i** + N **j** la réaction du plan incliné sur le cerceau,
J = mR^2 le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe C **k** . A l'instant origine (t = 0), I se trouve en O et les conditions initiales imposées au cerceau sont $R\omega_o > v_o > 0$.

<u>Données numériques</u>
m = 300
g = 10 ms^{-2} (accélération de la pesanteur)
f= 0,2
v_o = 2 ms^{-1}
$R\omega_o$ = 7 ms^{-1}
sin α =0,1
<u>Uniquement</u> pour les applications numériques, on confondra cos α et 1.

I. Préliminaires

1) Vérifier que la vitesse de glissement **V** (vitesse du point I du cerceau) à un instant quelconque est égale à (v + Rω) **i**
2) Exprimer l'énergie cinétique E_k du cerceau à un instant quelconque en fonction de m, v et Rω.
3) Grâce au théorème du centre de masse et du théorème du moment cinétique et sans hypothèse particulière sur les mouvements du cerceau, trouver 3 relations scalaires liant $\dot{v}$ et $R\dot{\omega}$ (avec les notations classiques $\dot{v} = \frac{dv}{dt}$ et $\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}$) aux données.
4) Ecrire le théorème de l'énergie cinétique : en déduire une relation homogène à une puissance liant $\dot{v}$ et $R\dot{\omega}$ aux données.
5) L'équation obtenue au I.4 est-elle indépendante de celles obtenues au I.3 ?
6) Calculer ω_o sachant que J = 75 10^{-3} $kg.m^2$.

II. Première phase

1) Calculer V(t = 0) . En déduire précisément les caractéristiques du mouvement ultérieur du cerceau. Exprimer T.
2) Trouver les lois d'évolution de v, Rω et V en fonction du temps. On pourra poser a = (f cos α- sin α) g. Calculer numériquement a.
3) En déduire que v s'annule pour un instant t = t_1 à déterminer. Que valent alors Rω et V ? (on les désignera respectivement par $R\omega_1$ et V_1)
4) Exprimer la distance x_1 parcourue par C pendant cette première phase.

5) Application numérique : calculer T_1 (T_1 désigne la réaction du plan incliné selon **i** pour cette phase 1), t_1 , $R\omega_1$, V_1 et x_1.

III. Deuxième phase

1) Décrire le type de mouvement pour $t > t_1$.
2) Quelles sont les lois d'évolution de v, Rω, et V en fonction du temps au cours de cette deuxième phase ?
3) Montrer que V va s'annuler pour un instant $t = t_2$ à déterminer. Que valent alors Rω et v ? (respectivement $R\omega_2$, et v_2).
4) Préciser la position x_2, de C à cet instant t_2.
5) Application numérique : calculer t_2 , $R\omega_2$, v_2 et x_2.

IV. Troisième phase

On pourra prendre une nouvelle origine des temps au début de cette troisième phase (t' = 0).
1) Décrire le type de mouvement ultérieur.
2) Quelles sont les lois d'évolution de v, Rω et T en fonction de t' au cours de cette troisième phase ?
3) Comment cette phase se termine-t-elle ? Préciser l'instant $t' = t'_1$. Que vaut alors Rω (désigné par $R\omega'_1$)
4) Préciser la position x'_1 de C à cet instant t'_1.
5) Application numérique : calculer T, t'_1 et x'_1.

V. Représentation graphique

Représenter sur un même graphique V et Rω en fonction du temps pour les trois phases précédentes. Donner simplement la nature du mouvement au delà de la troisième phase.

VI. Aspect énergétique

1) Exprimer littéralement la variation d'énergie cinétique entre les instants t' = 0 et $t'= t'_1$. Faire l'application numérique. Que vaut, entre ces mêmes instants, le travail de la réaction $\mathbf{F_R}$? Retrouver littéralement la variation d'énergie cinétique par application du théorème de l'énergie cinétique.
2) Exprimer littéralement la variation d'énergie cinétique entre les instants t = 0 et $t = t_2$. Faire l'application numérique. Retrouver cette valeur en calculant numériquement les différents travaux mis en jeu.