ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement Supérieur,
de la Formation des Cadres et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun
École Nationale des Industries Minérales
ENIM

Concours National Commun d'admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou assimilées
Session 2008

ÉPREUVE DE PHYSIQUE I

Filière **MP**

Durée 4 heures

Cette épreuve comporte 8 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve comporte 8 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé.

On veillera à une présentation claire et soignée des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Quelques manifestations des transferts thermiques

Le présent problème propose d'aborder quelques applications des transferts thermiques. La plus grande importance sera accordée au sens physique des résultats obtenus. Le problème est composé de trois parties indépendantes entre elles.

Dans les applications numériques, qui ne doivent pas être négligées, une attention particulière sera prêtée au nombre de chiffres à utiliser pour afficher les résultats. Ce nombre, qui dépend en général du niveau de précision recherché, ne doit en aucun cas dépasser le nombre de chiffres significatifs permis par les données. La valeur numérique de toute grandeur physique doit être accompagnée de son unité dans le système international des unités (SI).

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

1ère partie

Thermodiffusion dans une barre

On considère une barre (figure 1) solide, homogène et isotrope, indéformable, de longueur L et de section droite circulaire de rayon a très inférieur à L. La barre a une capacité thermique massique c et on note μ la masse volumique du matériau qui la constitue. Pour isoler la barre latéralement, on l'entoure d'une enveloppe athermane non représentée sur la figure. On peut donc négliger toute fuite thermique par la surface latérale de sorte que la température est uniforme sur une section droite de la barre et ne dépend donc que de son abscisse x et du temps t.

La barre est siège d'un phénomène de diffusion thermique ou conduction décrit par le vecteur courant thermique diffusif $\overrightarrow{j_Q}(\mathrm{M},t) = j(x,t)\ \overrightarrow{u}_x$. $\overrightarrow{u}_x$ est le vecteur unitaire de l'axe $\mathrm{O}x$.

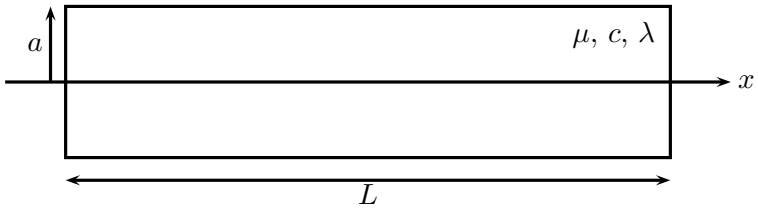

Figure 1: Barre solide calorifugée latéralement.

1.1. Équations générales

1.1.1. Rappeler la signification physique de $\overrightarrow{j_Q}(\mathrm{M},t)$ et déterminer sa dimension physique ainsi que son unité dans le système international des unités (S.I.).

1.1.2. En faisant un bilan thermique sur le tronçon de la barre compris entre les sections x et $x + \mathrm{d}x$ entre les instants t et $t + \mathrm{d}t$, montrer que les variations temporelles de l'énergie interne

volumique u de la barre sont reliées aux variations spatiales du vecteur courant thermique diffusif par :

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial j(x,t)}{\partial x}$$

1.1.3. Rappeler la loi de FOURIER et déterminer l'unité S.I. de la conductivité thermique λ du matériau constituant la barre solide. En déduire l'expression de $j(x,t)$.

1.1.4. Exprimer l'énergie interne volumique $u(x,t)$ en fonction de c, $T(t)$, μ et d'une éventuelle constante additive u_0.

1.1.5. En déduire l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $T(x,t)$.

1.1.6. Montrer que l'équation précédente, dite équation de la chaleur, peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{D}\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} \tag{1}$$

et donner l'expression du coefficient de diffusion thermique D en fonction de μ, c et λ. Donner la dimension de D ainsi que son unité S.I.

1.2. Régime stationnaire

Les extrémités $x = 0$ et $x = L$ de la barre sont mises en contact avec deux sources isothermes de chaleur de températures respectives $T_1 = T(0)$ et $T_2 = T(L)$. Si l'on attend suffisamment longtemps, un régime stationnaire s'établit.

1.2.1. De quelle variable dépend la température T dans un tel régime ? En déduire l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$.

1.2.2. Déterminer l'expression de $T(x)$ en fonction de T_1, T_2, L et x. Représenter graphiquement $T(x)$.

1.2.3. En déduire l'expression du vecteur courant thermique diffusif $\overrightarrow{j_Q}$ dans ce cas. Commenter le résultat obtenu.

1.3. Régime transitoire

On s'intéresse au régime transitoire qui précède le régime stationnaire étudié au §1.2. La figure 2 donne les profils de température $T(x,t)$ au sein de le barre en fonction de x à différents instants t. Initialement, tous les points de la barre sont à la même température T_0.

1.3.1. Par lecture directe du graphique, déduire les valeurs des températures T_1 et T_2 des deux extrémités de la barre ainsi que la température initiale T_0 de la barre.

1.3.2. Dans une autre expérience, la barre a une température initiale uniforme $\theta_0 = 20°\mathrm{C}$ égale à la température ambiante. L'extrémité gauche de la barre ($x = 0$) est brusquement mise, à l'instant $t = 0$, en contact avec une source isotherme de chaleur de température constante $\theta_1 = 100°\mathrm{C}$ tandis que l'autre extrémité ($x = L$) est maintenue à la température ambiante $\theta_2 = 20°\mathrm{C}$.

1.3.2.1. Proposer un moyen pratique pour maintenir l'extrémité droite de la barre ($x = L$) à la température ambiante.

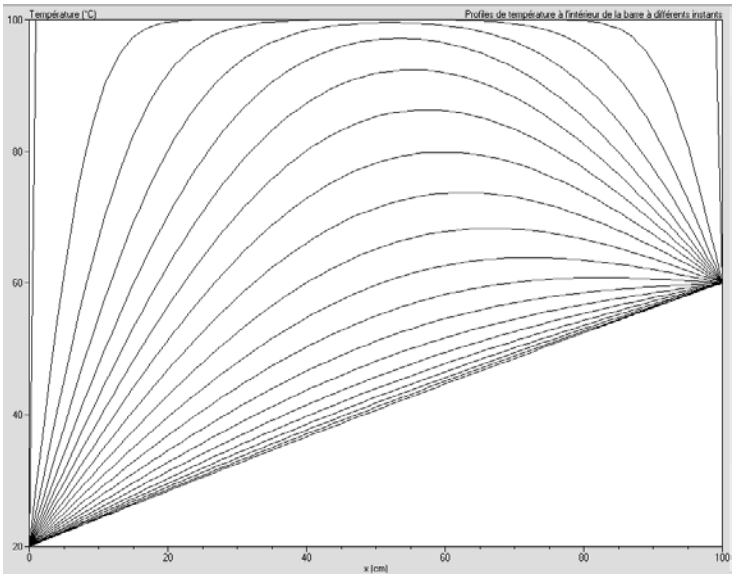

Figure 2: Profils de température à différents instants au sein d'une barre de longueur $L = 1\ \mathrm{m}$.

1.3.2.2. Tracer qualitativement les profils de température au sein de la barre à différents instants montrant l'évolution de la température des différents points de la barre depuis l'instant initial jusqu'à l'établissement du régime stationnaire.

2ème partie

Contacts thermiques

On cherche à expliquer, à l'aide de deux modèles différents, pourquoi un observateur touchant une table en bois et une table en acier à la même température a la sensation que le bois est plus chaud que l'acier.

2.1. Modèle statique

Dans le cadre du modèle statique, on considère deux cylindres $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$ de même section S, de même axe Ox, de conductivités thermiques respectives λ_1 et λ_2 et de longueurs respectives L_1 et L_2. Les deux cylindres sont mis bout à bout, le contact se faisant en $x = 0$ (figure 3). On maintient les extrémités $x = -L_1$ et $x = L_2$ aux températures respectives T_1 et T_2. On suppose que le régime stationnaire est établi et on note T_0 la température en $x = 0$.

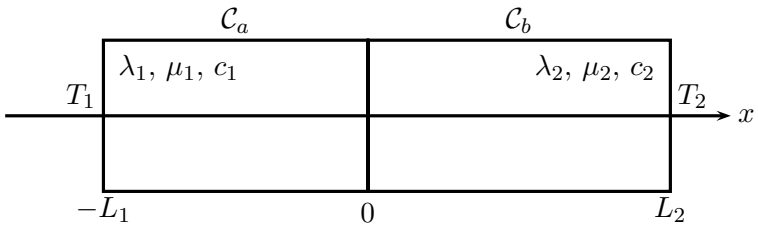

Figure 3: Deux cylindres en contact en $x = 0$.

2.1.1. Exprimer la température $T_i(x)$, $i = a, b$, dans chacun des deux cylindres $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_b$, en fonction de x, T_0 et respectivement (T_1, L_1) et (T_2, L_2).

2.1.2. Exprimer le vecteur courant thermique diffusif $\overrightarrow{j_Q}(x)$ dans chacun des deux cylindres.

2.1.3. En déduire la température T_0 de l'interface $x = 0$ des deux cylindres en fonction de T_1, T_2, L_1, L_2, λ_1 et λ_2.

2.1.4. La température de la main est $\theta_1 = 37°\mathrm{C}$. Calculer T_0 pour un contact main-bois puis T_0' pour un contact main-acier dans les deux cas suivants et conclure :

- $\theta_2 = 100°\mathrm{C}$ (sensation de chaud) ;
- $\theta_2 = 10°\mathrm{C}$ (sensation de froid).

On prendra $L_1 = L_2$ et on utilisera les valeurs suivantes des conductivités thermiques :

corps	main	bois	acier
$\lambda(\mathrm{W.K^{-1}.m^{-1}})$	10	1	100

Commenter les résultats obtenus.

2.2. Modèle dynamique

On considère que les deux cylindres sont illimités et emboîtés en $x = 0$. Le cylindre $\mathcal{C}_a$ s'étend de $-\infty$ à $x = 0$ et le cylindre $\mathcal{C}_b$ de $x = 0$ à $+\infty$.

Initialement ($t = 0$) le cylindre $\mathcal{C}_a$ est à la température T_1 uniforme et le cylindre $\mathcal{C}_b$ à la température T_2 uniforme également. Aux instants $t > 0$, les extrémités des cylindres sont maintenues à températures constantes : $T(-\infty, t) = T_1$ et $T(+\infty, t) = T_2$.

On note λ_1, c_1 et μ_1 respectivement la conductivité thermique, la capacité thermique massique et la masse volumique pour le cylindre $\mathcal{C}_a$. Les mêmes grandeurs physiques sont notées respectivement λ_2, c_2 et μ_2 pour le cylindre $\mathcal{C}_b$.

2.2.1. Dans chacun des deux cylindres, la température $T(x,t)$ est solution de l'équation de la chaleur (1) où $D = \lambda/\mu\, c$. On peut montrer, qu'en fait, le champ de température ne dépend que de la variable composée :

$$u = \frac{x}{\sqrt{4\,D\,t}}$$

L'équation de la chaleur devient alors[1] :

$$\frac{\mathrm{d}^2T(u)}{\mathrm{d}u^2} + 2\,u\,\frac{\mathrm{d}T(u)}{\mathrm{d}u} = 0$$

Montrer que dans chacun des deux cylindres le champ des températures $T(x,t)$ peut se mettre sous la forme :

$$T(u) = A + B\,\mathrm{erf}(u)$$

où A et B sont deux constantes et erf est la fonction erreur définie par :

$$\mathrm{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp -v^2\,\mathrm{d}v$$

On donne : $\mathrm{erf}(+\infty) = -\mathrm{erf}(-\infty) = 1$.

[1] On ne demande pas d'effectuer ce calcul dans le cadre de cette étude.

2.2.2. En utilisant les conditions aux limites spatiales adéquates, déterminer les expressions (A_1, B_1) pour le cylindre $\mathcal{C}_a$ et (A_2, B_2) pour le cylindre $\mathcal{C}_b$ des constantes A et B en fonction de T_0, T_1 et T_2.

2.2.3. Montrer que dans le cylindre $\mathcal{C}_a$, l'expression du vecteur courant thermique diffusif peut se mettre sous la forme :

$$\overrightarrow{j}_Q^{(a)}(x,t) = -(T_0 - T_1)\,\frac{E_1}{\sqrt{\pi\,t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4\,D_1\,t}\right)\,\overrightarrow{u}_x$$

et donner l'expression de l'effusivité E_1 en fonction de λ_1, μ_1 et c_1. En quelle unité exprime-t-on E_1 dans le S.I. ? $\overrightarrow{u}_x$ étant le vecteur unitaire de l'axe Ox.

2.2.4. Déterminer de même, l'expression du vecteur courant thermique diffusif dans le cylindre $\mathcal{C}_b$ et donner l'expression de E_2.

2.2.5. En déduire l'expression de la température d'interface T_0 en fonction de T_1, T_2, E_1 et E_2. Comparer avec le résultat obtenu dans le cadre du modèle statique.

2.2.6. Répondre aux questions du §2.1.4. dans le cadre du modèle dynamique et conclure. On donne :

corps	main	bois	acier
$E(10^3 \times \text{S.I.})$	$1,8$	$0,4$	14

2.3. Pour disposer d'eau fraîche à boire, deux bouteilles de 1 litre chacune sont placées dans un frigo où règne une température de $5°\text{C}$ environ. L'une des deux bouteilles est en verre, l'autre en plastique.

Au moment de se servir au frigo, que l'on suppose en équilibre thermodynamique, on se rend compte qu'au toucher, la bouteille en verre est plus froide que la bouteille en plastique.

L'eau contenue dans la bouteille en verre est-elle plus fraîche ? Expliquer.

3ème partie
Analogies thermoélectriques

3.1. Résistances thermiques

L'étude de la partie 1 a montré qu'en régime stationnaire, la température $T(x)$ au sein d'un milieu unidimensionnel de longueur L et dont les extrémités sont maintenues à des températures différentes $T_0 = T(0)$ et $T_L = T(L)$ est donnée par la loi linéaire suivante :

$$T(x) = T_0 + (T_L - T_0)\frac{x}{L}$$

On note Φ_{th}^c le flux thermique conductif à travers la section droite S perpendiculaire à Ox.

3.1.1. Déterminer l'expression de Φ_{th}^c et montrer que l'on peut écrire $T(0) - T(L) = R_{th}^c\,\Phi_{th}^c$ où R_{th}^c est appelée résistance thermique de conduction que l'on exprimera en fonction de λ, L et S.

3.1.2. Une analogie entre les grandeurs électriques et les grandeurs thermiques peut être dégagée sur la base des lois de FOURIER et d'OHM.

3.1.2.1. Donner la loi d'OHM locale et rappeler la signification physique des différentes grandeurs qui y figurent. Quelles sont ses conditions de validité.

3.1.2.2. En déduire l'analogie qui existe entre les grandeurs de conduction thermique et de conduction électrique. On précisera en particulier les équivalents électriques de Φ_{th}^c et $T(0) - T(L)$.

3.1.3. Quel est l'équivalent en terme de conduction thermique, de deux résistors montés en série puis celui de deux résistors montés en parallèle ? On donnera dans chaque cas l'expression de la résistance thermique équivalente.

3.1.4. Lorsqu'un corps solide à la température T est plongé dans un fluide ambiant de température T_a, un transfert conducto-convectif a lieu au niveau de la surface du corps solide. Dans le cadre de la loi de NEWTON, un tel transfert peut être caractérisé par une résistance thermique de convection R_{th}^{cc}. En déduire l'expression du flux thermique conducto-convectif Φ_{th}^{cc} compté positivement dans le sens sortant du corps. On exprimera Φ_{th}^{cc} en fonction de R_{th}^{cc}, T et T_a.

3.1.5. On considère à présent un corps solide à la température T placé dans un environnement ambiant de température T_a. On s'intéresse aux échanges thermiques par rayonnement.

3.1.5.1. Écrire la loi de STEPHAN pour le corps solide et pour l'environnement ambiant. On notera σ la constante de STEPHAN.

3.1.5.2. En déduire l'expression du flux thermique radiatif total Φ_{th}^{r} échangé par le corps solide avec le milieu ambiant, compté positivement dans le sens sortant du corps solide, en fonction de σ, T, T_a et la surface S du corps solide.

3.1.5.3. Montrer que dans le cas d'un faible écart de température entre le corps solide et le milieu ambiant, l'échange thermique par rayonnement peut être décrit par une résistance thermique de rayonnement R_{th}^{r} que l'on exprimera en fonction de σ, T_a et S. On rappelle l'identité remarquable : $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2\,b + a\,b^2 + b^3)$.

3.1.5.4. Calculer numériquement R_{th}^{r} pour un corps solide de surface $S = 1,5\ \mathrm{m}^2$ placée dans l'air ambiant à la température $T_a = 298\ \mathrm{K}$. On donne la constante de STEPHAN $\sigma = 5,67\times10^{-8}\ \mathrm{W.m^{-2}.K^{-4}}$.

3.2. Bilan thermique du corps humain

L'être humain, ainsi que d'autres animaux, a la capacité de maintenir constante la température interne de son corps ; c'est l'homéothermie. On se propose dans cette section d'étudier le maintien de l'homéothermie chez un individu debout, nu et au repos tout en étant exposé à la température confortable $\theta_a = 23°\mathrm{C}$ du milieu ambiant, supposé être de l'air ambiant. La surface du corps humain $S = 1,5\ \mathrm{m}^2$ sera supposée isotherme de température $\theta = 33°\mathrm{C}$.

Les échanges au niveau de la surface du corps humain ont lieu selon les trois mécanismes suivants :

- transfert conducto-convectif caractérisé par une résistance thermique $R_{th}^{cc} = 167\times10^{-3}\ \mathrm{K.W^{-1}}$;
- transfert radiatif caractérisé par une résistance thermique $R_{th}^{r} = 133\times10^{-3}\ \mathrm{K.W^{-1}}$;
- évaporation thermique d'une masse moyenne $m_e = 0,3\ \mathrm{kg/jour}$ d'eau par la peau et les voies respiratoires.

La production métabolique journalière ($\mathrm{PMJ} = 13\ \mathrm{MJ/jour}$) permet de compenser ces pertes.

3.2.1. On se place tout d'abord en régime stationnaire.

3.2.1.1. Calculer numériquement la puissance métabolique $\mathcal{P}_M$ développée par le corps humain, le flux thermique Φ_{th}^{r} émis par rayonnement ainsi que le flux thermique Φ_{th}^{cc} émis par convection.

3.2.1.2. Calculer numériquement la puissance $\mathcal{P}_e$ nécessaire pour entretenir l'évaporation thermique de l'eau sachant que la chaleur latente de changement d'état de l'eau vaut $L = 2,4\ \mathrm{MJ.kg^{-1}}$.

3.2.1.3. En déduire, à l'aide d'un bilan, la puissance résiduelle $\mathcal{P}_s$. À quoi sert-elle ?

3.2.1.4. Donner l'équation algébrique reliant les différentes grandeurs électriques du circuit représenté figure 4 dans le cas où les courants débités par les deux générateurs de tension sont négligeables.

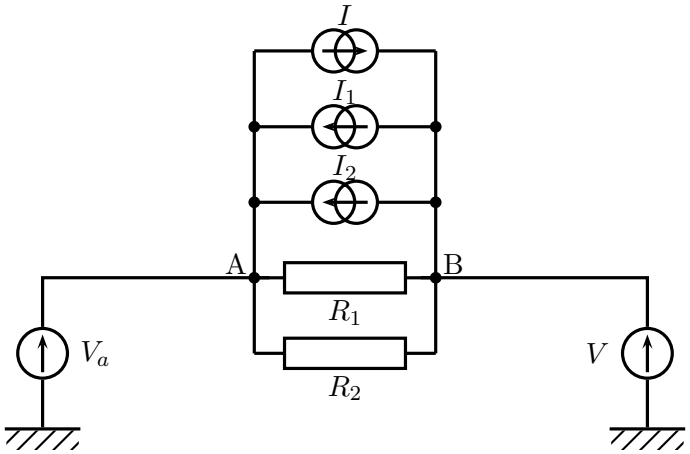

Figure 4: Circuit électrique.

3.2.1.5. En déduire, en s'inspirant de l'analogie thermoélectrique développée au §3.1.2., que le circuit précédent permet de traduire le bilan thermique du corps humain. Pour obtenir le *circuit thermique équivalent*, on recopiera le circuit de la figure 4 et on remplacera les grandeurs électriques par leurs équivalents thermiques convenables.

3.2.1.6. Déterminer, pour le circuit thermique ainsi obtenu, la représentation équivalente de NORTON ainsi que celle de THÉVENIN du réseau électrique vu des points A et B, et excluant les équivalents thermiques des générateurs de tension V_a et V. Vérifier, dans chaque cas, que l'on retrouve bien le bilan thermique établi auparavant.

3.2.2. On se place à présent en régime quasi stationnaire et on note $C_s = C/S$ la capacité thermique surfacique du corps humain. On suppose que la température $T(t)$ de la surface S du corps humain est toujours uniforme.

3.2.2.1. En faisant un bilan énergétique entre les instants t et $t+\mathrm{d}t$, montrer que la température $T(t)$ de la surface du corps humain est solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{T - T_a}{\tau} = \Lambda \tag{2}$$

On exprimera les deux constantes τ et Λ en fonction de C, R_{th}^{cc}, R_{th}^{r}, $\mathcal{P}_m$, $\mathcal{P}_e$ et $\mathcal{P}_s$.

3.2.2.2. Comment retrouve-t-on le cas stationnaire à partir l'équation (2) ? Les résultats sont-ils compatible avec ceux du §3.2.1. ?

3.2.2.3. Dessiner le schéma du circuit thermique traduisant le bilan thermique du corps humain en tenant compte de sa capacité calorifique. Pour cela, on écrira le bilan thermique sous une forme adéquate permettant de justifier un tel schéma équivalent.

3.2.2.4. Résoudre l'équation différentielle (2) pour déterminer l'évolution de la température $T(t)$ de la surface du corps humain au cours du temps t. On exprimera le résultat en fonction de t, T_a, Λ, τ et $T(0)$ température de la surface du corps humain à l'instant initial $t = 0$.

3.2.2.5. Déterminer l'expression de la température d'équilibre T_e de la surface du corps humain en fonction de T_a, Λ et τ. Calculer numériquement T_e.

3.2.2.6. Représenter graphiquement $T(t)$ en distinguant les trois cas :

a) $T(0) > T_e$;

b) $T(0) = T_e$;

c) $T(0) < T_e$.

À quelle situation physique correspond chacun de ces trois cas ? Montrer comment, le cas échéant, on peut déterminer τ à partir des graphiques obtenus.

3.2.2.7. Sachant que dans l'eau, un corps humain se refroidit environ 25 fois plus rapidement que dans l'air calme, estimer la résistance convective $R^{cc}_{th,\,\text{eau}}$ en admettant que la résistance thermique de rayonnement n'est pas modifiée. Commenter.

3.3. Effet des vêtements sur le bilan thermique du corps

On revient en régime stationnaire et on s'intéresse à l'effet des vêtements sur le bilan des échanges thermiques entre un corps humain et le milieu ambiant.

La surface d'un corps humain habillé est recouverte à 80%. Dans toute la suite, on néglige la convection et le rayonnement à travers les vêtements mais on tient compte de la conduction thermique à travers ces vêtements.

3.3.1. Comment faut-il modifier les valeurs des résistances thermiques R^{cc}_{th} et R^{r}_{th} ? On notera $R^{cc,v}_{th}$ et $R^{r,v}_{th}$ les nouvelles résistances. Calculer numériquement $R^{cc,v}_{th}$ et $R^{r,v}_{th}$.

3.3.2. Montrer que pour tenir compte de l'effet des vêtements, il faut aussi introduire, dans le schéma électrique équivalent du §3.2.1.5., une résistance thermique supplémentaire $R^{c,v}_{th}$.

3.3.3. Donner le nouveau schéma du circuit thermique.

3.3.4. En déduire la valeur de la résistance thermique des vêtements $R^{c,v}_{th}$ conduisant à la même puissance du métabolisme et à la même température $\theta = 33°\text{C}$, dans une pièce à la température $\theta'_a = 20°\text{C}$.

FIN DE L'ÉPREUVE