Notez bien que ce n'est pas Maple qui fais les exercices, c'est la personne qui utilise Maple qui fait les exercices, mais en gagnant du temps sur des trucs de calculs, de vérifications, de factorisations, de simplifications...

```
> restart;# sol exo 1
> f[n]:=x->1+x**2*sin(1/(n*x));
```

$$f_n := x \to 1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{n\,x}\right)$$

```
> limit(f[n](x),n=infinity);
```

$$1$$

```
> g:=y->sin(y)/y;
```

$$g := y \to \frac{\sin(y)}{y}$$

```
> maximize(g(y),y=-1..1);
```

$$1$$

```
> minimize(g(y),y=-1..1);
```

$$\sin(1)$$

Alors pour tout réel x et tout entier non nul n on a :

```
> abs(f[n](x)-1)<=abs(x)/n;
```

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{n\,x}\right) \right| \le \frac{|x|}{n}$$

Alors pour tout x dans le segment [a,b],

```
> abs(f[n](x)-1)<=max(abs(a),abs(b))/n;
```

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{n\,x}\right) \right| \le \frac{\max(|a|,|b|)}{n}$$

D'où la convergence uniforme sur tout segment de R de la suite (fn).

```
> limit(f[n](n),n=infinity);
```

$$2$$

La convergence sur R de la suite (fn) n'est uniforme.

```
> restart;# sol exo 4
> with(student):
```

1)

```
> assume(0<=x,x<=2);
> assume(n,integer);
> f[n]:=x->n^2*x*(1-x)^n;
```

$$f_{n\sim} := x \to n^2\, x\, (1-x)^n$$

```
> diff(f[n](x),x);
```

$$n\sim^2\, (1-x\sim)^{n\sim} - \frac{n\sim^3\, x\sim\, (1-x\sim)^{n\sim}}{1-x\sim}$$

```
> factor(%);
```

$$\frac{n\sim^2\, (1-x\sim)^{n\sim}\, (-1+x\sim+n\sim\, x\sim)}{-1+x\sim}$$

Ceci permet d'établir facilement le tableau des variations.

2)

```
> alpha[n]:=Int(f[n](x),x=0..1);
```

$$\alpha_{n\sim} := \int_0^1 n\sim^2\, x\sim\, (1-x\sim)^{n\sim}\, dx\sim$$

```
> alpha[n]:=intparts(%,x);
```

$$\alpha_{n\sim} := -\int_0^1 -\frac{n\sim^2\, (1-x\sim)^{(1+n\sim)}}{1+n\sim}\, dx\sim$$

```
> value(%);
```

$$-\frac{n\sim^2\, (-1+(\lim_{x\sim\to 1-} (1-x\sim)^{(n\sim+2)}))}{3\, n\sim+n\sim^2+2}$$

```
> Int(f[n](x),x=0..1)=n^2/(n^2+3*n+2);
```

$$\int_0^1 n\sim^2\, x\sim\, (1-x\sim)^{n\sim}\, dx\sim = \frac{n\sim^2}{3\, n\sim+n\sim^2+2}$$

```
> limit(%,n=infinity);
```

$$\lim_{n\sim\to\infty} \int_0^1 n\sim^2\, x\sim\, (1-x\sim)^{n\sim}\, dx\sim = 1$$

3)

```
> assume(0<x,x<1);
```

```
> limit(f[n](x),n=infinity);
```

$$0$$

La suite (fn) converge simplement vers 0 sur [0,1]. mais puisque

```
> limit(Int(f[n](x),x=0..1),n=infinity)=1;# différent de 0
```

$$\lim_{n\sim\to\infty} \int_0^1 n\sim^2 x\sim (1-x\sim)^{n\sim}\, dx\sim = 1$$

La convergence de (fn) vers 0 sur [0,1] n'est pas uniforme.

3) En considérant le tableau de variations de f[n] on voit que pour a dans]0,1[la suite (fn) converge vers 0 uniformément sur [a,2-a].

```
> restart;# sol exo 5
> assume(n,integer);
> En:=(n+1)*diff(y(x),x,x)-(2*n+1)*diff(y(x),x)+n*y(x)=0;
```

$$En := (n\sim+1)\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - (2\,n\sim+1)\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + n\sim\, y(x) = 0$$

```
> dsolve([En,y(0)=0,D(y)(0)=1]);
```

$$y(x) = (n\sim+1)\,\mathbf{e}^{x} + (-n\sim-1)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{n\sim\, x}{n\sim+1}\right)}$$

```
> Yn:=x->(n+1)*exp(x)+(-n-1)*exp(n/(n+1)*x);
```

$$Yn := x \to (n+1)\,\mathbf{e}^{x} + (-n-1)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{n\,x}{n+1}\right)}$$

```
> limit(Yn(x),n=infinity);
```

$$\mathbf{e}^{x}\, x$$

La suite (Yn) converge simplement sur R vers Y(x) = x.exp(x).

```
> h:=u->exp(u)-1-u-u**2/2;
```

$$h := u \to \mathbf{e}^{u} - 1 - u - \frac{1}{2}u^2$$

```
> diff(h(u),u);
```

$$\mathbf{e}^{u} - 1 - u$$

```
> diff(h(u),u,u);
```

$$\mathbf{e}^{u} - 1$$

h''(u) < 0 pour u < 0

```
> D(h)(0);
```

$$0$$

h'(u) < 0 pour u < 0

```
> h(0);
```

$$0$$

D'où h(u) < 0 pour tout u < 0.

```
> Yn(x)-x*exp(x)=exp(x)*((n+1)-(n+1)*exp(-x/(n+1))-x);
```

$$(n\sim+1)\,\mathbf{e}^{x}+(-n\sim-1)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{n\sim x}{n\sim+1}\right)}-\mathbf{e}^{x}\,x=\mathbf{e}^{x}\left(n\sim+1-(n\sim+1)\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{n\sim+1}\right)}-x\right)$$

```
> Yn(x)-x*exp(x)=-(n+1)*exp(x)(exp(-x/(n+1))-1+x/(n+1));
```

$$(n\sim+1)\,\mathbf{e}^{x}+(-n\sim-1)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{n\sim x}{n\sim+1}\right)}-\mathbf{e}^{x}\,x=-(n\sim+1)\,(\mathbf{e}^{x})\left(\mathbf{e}^{\left(-\frac{x}{n\sim+1}\right)}-1+\frac{x}{n\sim+1}\right)$$

Alors d'aprés le résultat de la question précèdente on a pour w > 0 et x dans [0,w] :

```
> abs(Yn(x)-x*exp(x))<=(n+1)*exp(w)*w**2/(n+1)**2;
```

$$\left|-(n\sim+1)\,\mathbf{e}^{x}-(-n\sim-1)\,\mathbf{e}^{\left(\frac{n\sim x}{n\sim+1}\right)}+\mathbf{e}^{x}\,x\right|\leq\frac{\mathbf{e}^{w}\,w^{2}}{n\sim+1}$$

Ceci établit la convergence uniforme de (Yn) vers Y sur [0,w].