ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1999 **FILIÈRE PC**

PREMIÈRE COMPOSITION DE PHYSIQUE

(Durée : 3 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆ ⋆ ⋆

Principe et mise en œuvre des pincettes optiques

L'objet du problème est l'étude des *pincettes optiques*. Dans ce dispositif, un faisceau lumineux issu d'un laser est focalisé à l'aide d'un objectif de microscope sur un petit objet diélectrique. La non-uniformité de l'intensité lumineuse permet dans certaines conditions de piéger l'objet au voisinage du point de convergence du faisceau. Cette technique, développée vers 1970, a trouvé récemment un nouveau champ d'application dans la manipulation de cellules *in vitro*.

Après un bref préliminaire (première partie), la seconde partie concerne le piégeage d'objets dont la dimension a est petite devant la longueur d'onde λ du rayonnement (régime de Rayleigh). La troisième partie est consacrée à la situation inverse $\lambda \ll a$; dans ce cas, il est légitime de traiter le faisceau lumineux dans le cadre de l'optique géométrique. Dans la quatrième partie est abordé le problème du calibrage d'un dispositif à pincettes optiques, conçu pour déterminer les propriétés élastiques de globules rouges.

Les trois premières parties sont largement indépendantes.

Dans tout le problème, $< A >$ désigne la valeur moyenne temporelle de la grandeur A. On notera A la norme $\|\vec{A}\|$ du vecteur $\vec{A}$.

Données numériques

Les indices sont donnés pour un rayonnement situé dans le proche infrarouge ($\lambda \sim 1\,\mu$m).

Célérité de la lumière	$c = 3,00 \times 10^8$ m s^{-1}
Indice de l'eau	$n_e = 1,33$
Indice de la silice fondue	$n_s = 1,45$
Masse volumique de la silice fondue	$\rho_s = 2,21 \times 10^3$ kg m^{-3}
Permittivité du vide	$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI
Viscosité dynamique de l'eau	$\eta = 9,00 \times 10^{-4}$ kg m^{-1}s^{-1}
Taille caractéristique d'un globule rouge	8 μm

$$\int_0^{\pi} \sin^3\theta d\theta = \frac{4}{3}$$

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

Première partie
Préliminaires

1.a) Donner l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle électrique rigide $\vec{p}$ dans un champ électrostatique extérieur $\vec{E}$.

b) En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ qui s'exerce sur le dipôle lorsqu'il est placé dans un champ $\vec{E}$ non-uniforme. On explicitera l'une des composantes, F_x par exemple.

c) Le dipôle est induit par le champ $\vec{E}$ et est donné par $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$ où α, la polarisabilité, est une constante caractéristique du système dipolaire. Montrer que la force $\vec{F}$ est donnée par :

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\epsilon_0 \alpha \ \vec{\text{grad}}(E^2)$$

Dans toute la suite, on admettra que, pour un champ $\vec{E}$ variable et périodique, cette expression est valable en moyenne temporelle :

$$< \vec{F} >= \frac{1}{2}\epsilon_0 \alpha \ \vec{\text{grad}}(< E^2 >)$$

où α est la polarisabilité dynamique, supposée réelle.

2. Soit $(\vec{E}(\vec{r},t), \vec{B}(\vec{r},t))$ le champ électromagnétique d'une onde *dans le vide.*

a) Donner l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ correspondant à ce champ et préciser son interprétation physique.

b) Une onde électromagnétique transporte de la « quantité de mouvement ». Donner deux exemples (expérimentaux ou arguments théoriques) justifiant cette propriété.

c) La densité volumique de quantité de mouvement est donnée par $\vec{g} = \vec{R}/c^2$. Pour une onde progressive quasi-plane, de pulsation ω et de vecteur d'onde $\vec{k} = k\vec{u}$ ($\vec{u}$ vecteur unitaire), exprimer $\vec{g}$ à l'aide de E et de $\vec{u}$.

d) On désigne par I la puissance qui traverse la section droite d'un faisceau lumineux parallèle. Montrer que le flux $\vec{G}$ de quantité de mouvement associé s'écrit :

$$\vec{G} = I\vec{u}/c$$

Deuxième partie
Régime de Rayleigh

On considère une sphère diélectrique transparente d'indice n_s, de rayon a et de centre O, placée dans le vide. Une onde électromagnétique de longueur d'onde λ, se propage dans la direction Oz. Son champ électrique est de la forme :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0(\vec{r})\cos(kz - \omega t + \phi(\vec{r}))$$

On suppose que a est très petit devant les échelles de longueur caractéristiques des variations du champ électrique et devant λ.

1.a) Expliquer pourquoi la sphère acquiert une polarisation.

b) La relation entre le dipôle total induit $\vec{p}$ et le champ électrique $\vec{E}$ est donnée $\vec{p} = \epsilon_0 \alpha \vec{E}$ avec $\alpha = 4\pi a^3(n_s^2 - 1)/(n_s^2 + 2)$. Quelle est l'équation aux dimensions de α ? À quelle grandeur caractéristique de la sphère peut-on comparer ce coefficient ?

c) En déduire que le gradient d'intensité lumineuse génère une force sur le dipôle dont on donnera la moyenne temporelle $\vec{\mathcal{F}}_G$ en fonction de α et de $E_0(\vec{r})$.

2. Par ailleurs, un dipôle oscillant rayonne un champ électromagnétique dans tout l'espace. La puissance moyenne $d\mathcal{P}$ rayonnée à grande distance dans le vide par le dipôle oscillant $\vec{p}(t)$ dans l'angle solide $d\Omega$, d'angle polaire θ par rapport à la direction du dipôle, est donnée par l'expression :

$$d\mathcal{P} = \frac{\sin^2\theta}{16\pi^2\varepsilon_0 c^3} < (\frac{d^2\vec{p}}{dt^2})^2 > d\Omega$$

a) Où est prélevée cette puissance ?

b) Quelle est la quantité de mouvement emportée par le rayonnement du dipôle par unité de temps ?

c) En déduire que s'exerce sur le dipôle induit une autre force, dite force de diffusion. Montrer que le module de la valeur moyenne $\vec{\mathcal{F}}_D$ de cette force s'écrit :

$$\mathcal{F}_D = \frac{\varepsilon_0 \alpha^2 \omega^4 E_0^2}{12\pi c^4}$$

Comment est orientée cette force ?

3. On cherche à piéger la sphère au voisinage d'un point F.

a) Tracer l'aspect que doivent présenter les lignes de champ du gradient de $E_0(\vec{r})$ au voisinage de F pour réaliser ce piégeage. Commenter l'action de $\vec{\mathcal{F}}_D$ dans le fonctionnement du piège.

b) Montrer que le piège ne peut être stable selon l'axe Fz que si la grandeur

$$\xi(\vec{r}) = \frac{E_0(\vec{r})}{\left|\dfrac{\partial E_0(\vec{r})}{\partial z}\right|}$$

est, au voisinage de F, inférieure à une limite ξ_M que l'on exprimera en fonction de λ, de a et de n_s.

c) *Application numérique* : le rayonnement utilisé est celui d'un laser Nd :YAG (grenat mixte d'ytrium et d'aluminium dopé au néodyme) de longueur d'onde $\lambda = 1,064\,\mu$m et de puissance maximale $< P_M >= 600$ mW. Il est focalisé par un objectif de microscope et au point de convergence F, sa section S est voisine de λ^2. La sphère est en silice de rayon $a = 0,1\,\mu$m. Calculer ξ_M. Donner un *ordre de grandeur* de $\mathcal{F}_D$. Peut-on faire léviter la sphère dans l'air ?

Troisième partie
Approximation de l'optique géométrique

On se place désormais dans la limite $a \gg \lambda$. On suppose que l'on peut décomposer le faisceau lumineux incident sur la sphère en pinceaux élémentaires, indépendants, qui évoluent en suivant les lois de l'optique géométrique, chaque pinceau étant caractérisé par sa direction initiale et sa puissance. La polarisation de la lumière ne sera pas prise en compte dans cette étude.

1. En quoi cette démarche est-elle une approximation ? Quel effet est manifestement oublié ?

2. On considère un pinceau élémentaire de direction Ou, de puissance dI, qui frappe la sphère, plongée dans un milieu d'indice n_e ($n_e < n_s$), sous une incidence θ. Il donne naissance à un pinceau réfléchi $\mathcal{R}$ et à une série de pinceaux émergents $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ...$ (voir figure 1). On appelle r l'angle de réfraction du pinceau incident , R et T respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en énergie à l'interface entre la sphère et le milieu environnant.

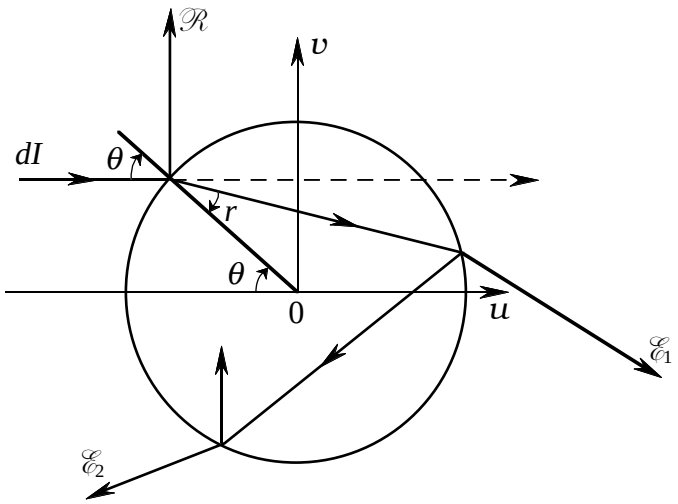


Figure 1

a) Indiquer sans calculs de quels paramètres peuvent dépendre R et T.

b) Calculer la puissance des pinceaux $\mathcal{R}, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, ...$ en fonction de dI, R et T.

c) Montrer que par rapport à la direction du pinceau incident, le pinceau émergent $\mathcal{E}_N$ a tourné de l'angle :

$$\Psi_N = 2(\theta - r) + (N-1)(\pi - 2r)$$

d) La force qui s'exerce sur la sphère et qui résulte de la réflexion et des réfractions multiples du pinceau incident, se décompose en une composante parallèle au pinceau incident $d\vec{\mathcal{F}}_u$ selon Ou et une composante normale $d\vec{\mathcal{F}}_v$ selon Ov.

Pour calculer ces forces, on adoptera la même démarche qu'à la question **2.** de la deuxième partie (bilan de quantité de mouvement) . La sphère étant dans un milieu d'indice n_e, on admettra que les expressions correctes des forces sont obtenues en prenant la relation entre flux de quantité de mouvement et puissance d'un faisceau obtenue en **2.d)** dans la première partie, et en multipliant le résultat final par n_e.

Calculer alors, sous forme de séries, les deux composantes $d\mathcal{F}_u$ et $d\mathcal{F}_v$, puis explicitement en formant la combinaison $d\mathcal{F}_u + id\mathcal{F}_v$. On posera $\beta = 2(\theta - r)$ et $\gamma = (\pi - 2r)$. Préciser, sans calcul, le signe de $d\mathcal{F}_u$.

3. La sphère, toujours plongée dans le milieu d'indice n_e, est placée au voisinage du foyer F d'un objectif de microscope, que l'on assimilera à une lentille mince de focale f et de rayon b (voir figure 2). Cet objectif est éclairé *uniformément* par un faisceau parallèle de puissance totale I. On suppose, pour simplifier, que le centre de la sphère reste sur l'axe optique Fz de l'objectif et on note $z = \overline{FO}$. Conformément aux idées exposées au début de cette partie, on décompose le faisceau incident en pinceaux élémentaires P_ϕ, d'angle ϕ par rapport à Fz et d'angle solide $d\Omega$ (voir figure 2).

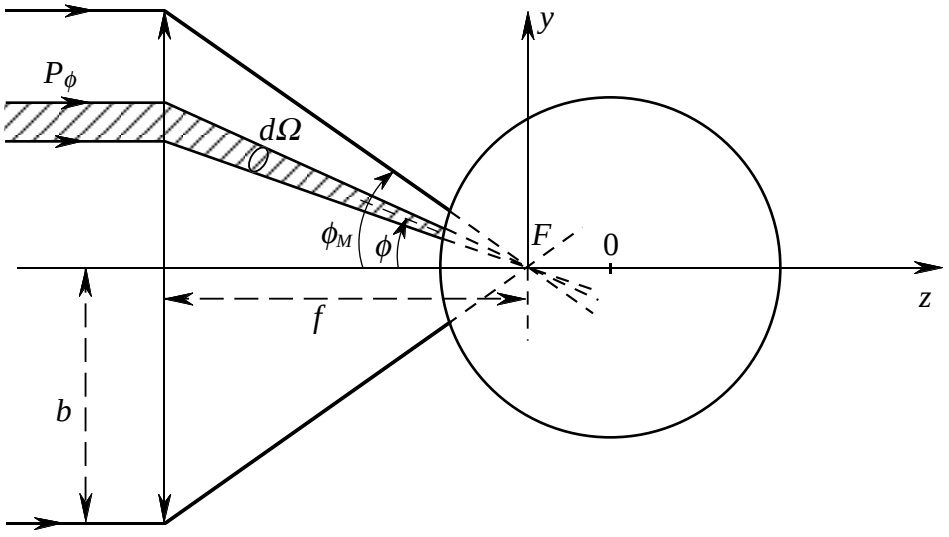


Figure 2

a) Exprimer la puissance dI_ϕ du pinceau P_ϕ en fonction de I , de ϕ , de $d\Omega$ et des paramètres géométriques. On supposera que l'objectif est parfaitement transparent pour la longueur d'onde du faisceau incident et qu'il est traité pour rendre négligeable toute réflexion.

b) Soit $\theta(\phi)$ l'angle d'incidence du pinceau P_ϕ sur la sphère. Donner une relation entre $\theta(\phi)$, ϕ, a et z.

c) Soient $\vec{\mathcal{F}}_u$ et $\vec{\mathcal{F}}_v$ les résultantes des forces $d\vec{\mathcal{F}}_u$ et $d\vec{\mathcal{F}}_v$ des pinceaux élémentaires. Quelles sont les composantes non nulles de $\vec{\mathcal{F}}_u$ et de $\vec{\mathcal{F}}_v$?

d) Exprimer ces composantes sous forme d'intégrale simple portant sur ϕ, à l'aide de $d\mathcal{F}_u/dI_\phi$ et $d\mathcal{F}_v/dI_\phi$. On introduira l'angle ϕ_M tel que $\tan\phi_M = b/f$. Que peut-on dire de la dépendance de ces forces avec le rayon a de la sphère et la distance z ?

e) Pourquoi, dans cette expérience, utilise-t-on un objectif de microscope ?

4. Les intégrales précédentes sont bien adaptées au calcul numérique et peuvent s'étendre au calcul des forces pour une sphère dont l'origine est sur l'axe Fy (ou même en un point quelconque). La figure 3*a* (resp. 3*b*) présente les résultats obtenus pour le piégeage d'une sphère de silice dans l'eau, le long de Fz (resp. Fy) avec un objectif d'angle d'ouverture $\phi_M = 70°$ et un faisceau incident non polarisé. Ces graphes donnent les composantes non nulles des forces $\vec{\mathcal{F}}_u$ et $\vec{\mathcal{F}}_v$, réduites par la quantité $n_e I/c$. Noter que dans le cas *b*, $\vec{\mathcal{F}}_u$ est selon Fz et $\vec{\mathcal{F}}_v$ selon Fy. Commenter ces graphes, en précisant notamment l'effet de chaque force $\vec{\mathcal{F}}_u$ et $\vec{\mathcal{F}}_v$ et pour quelle gamme de valeurs de z il y a piégeage efficace selon Fz (cas a) ou selon Fy (cas b). En quel point la force de piégeage est-elle nulle ?

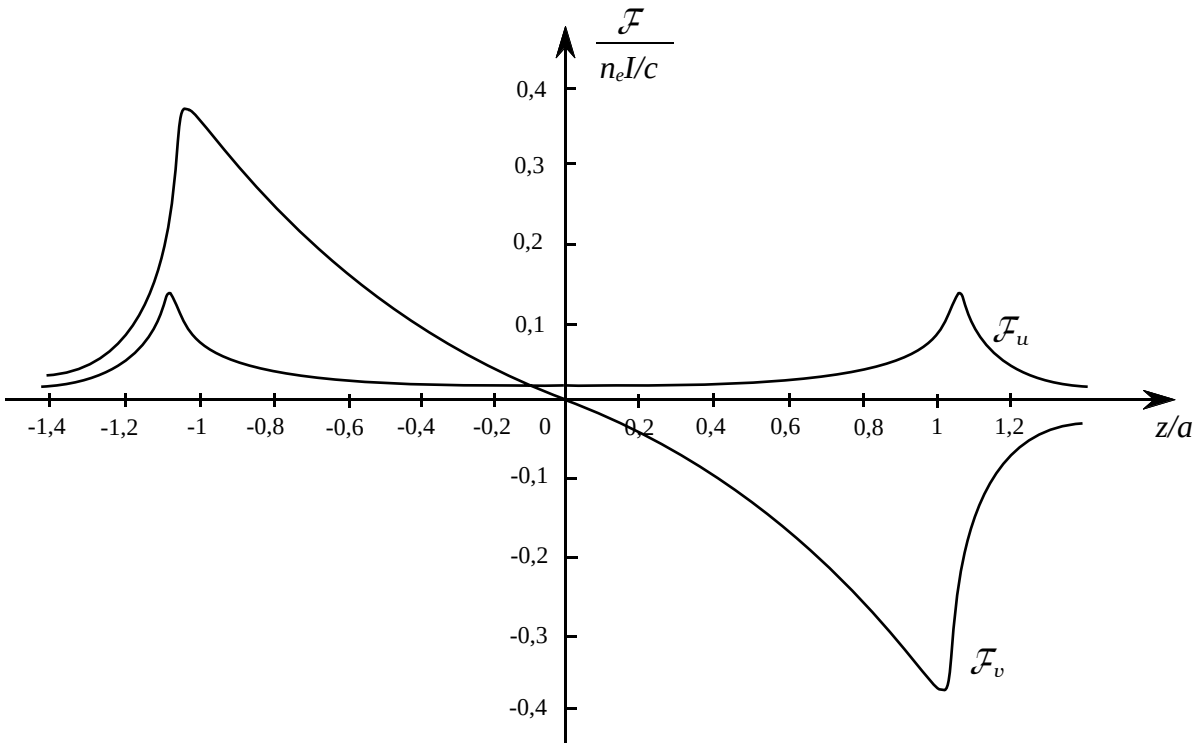


Figure 3a

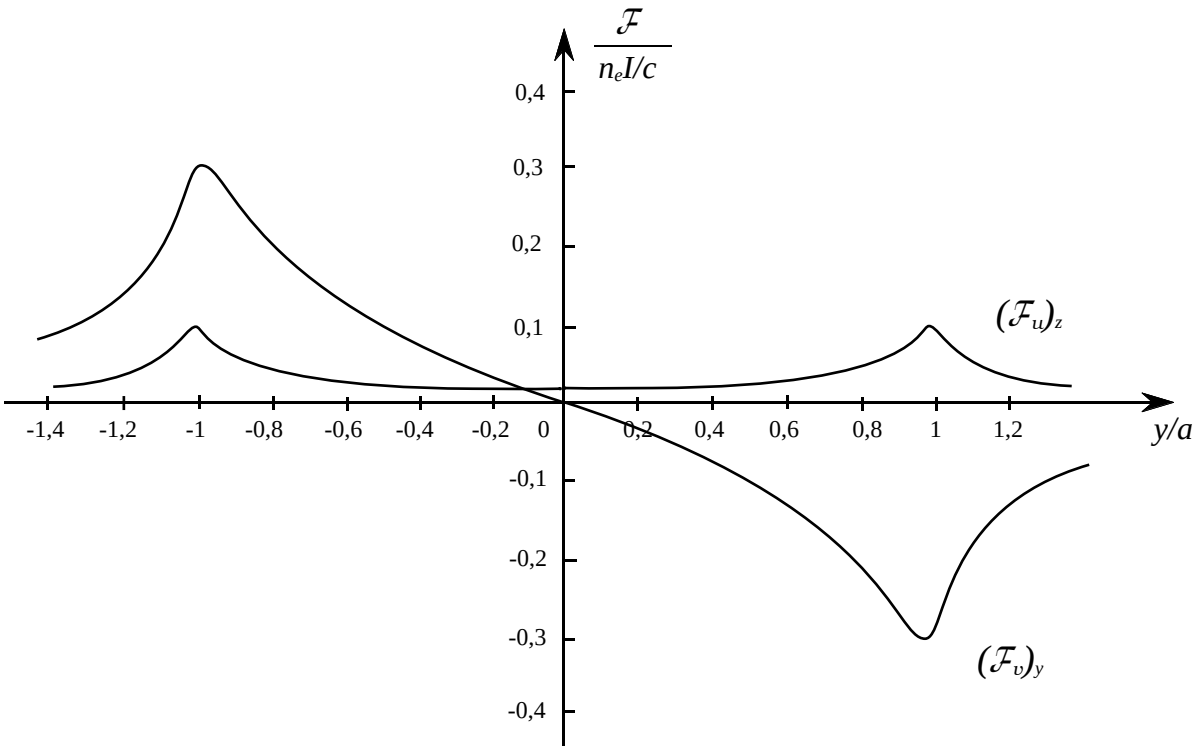


Figure 3b

Quatrième partie
Calibrage d'un dispositif à pincettes optiques

Pour la situation expérimentale fréquente où le rayon a de la sphère est voisin de la longueur d'onde λ, les calculs théoriques sont beaucoup plus complexes. On cherche alors à calibrer le piège, c'est-à-dire à déterminer expérimentalement la relation entre la force maximale de piégeage et la puissance du laser utilisé.

1. On piège optiquement, dans de l'eau, une bille de silice de rayon $a = 1,05\,\mu$m par un faisceau laser convergent de foyer F. Par un dispositif optique approprié, ce foyer est déplacé orthogonalement à l'axe du faisceau incident à vitesse constante v_0. On rappelle qu'une sphère de rayon a animée de la vitesse $\vec{V}$ dans un fluide de viscosité dynamique η subit une force $\vec{F}_S$ de frottement visqueux (force de Stokes) de la forme :

$$\vec{F}_S = -6\pi\eta a\vec{V}$$

a) En s'aidant de la figure 3*b*, montrer que la sphère ne suit le mouvement du foyer que si v_0 est inférieure à une vitesse limite v_l. Comment la détermination de v_l permet-elle de calibrer le piège ?

b) Dans la pratique, on impose à F un mouvement sinusoïdal selon la loi

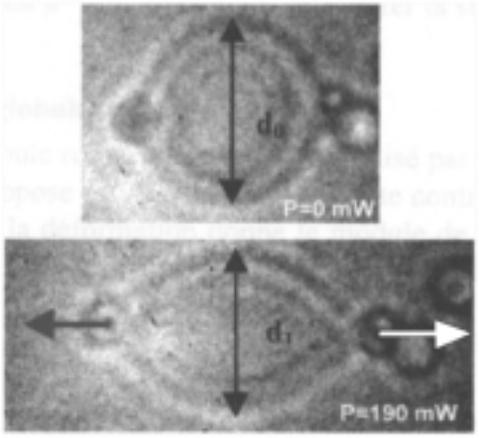
$$y_F = y_0 \cos(2\pi\nu t)\ .$$

Expérimentalement, on constate que lorsque la fréquence ν atteint une certaine valeur critique ν_c, la bille cesse de suivre F et quitte le piège. Ainsi, pour une puissance de laser de 300 mW et

une excursion $y_0 = 11,9\,\mu$m, on obtient $\nu_c = 15$ Hz. Calculer v_l et la force maximale de piégeage du faisceau.

c) En portant la puissance du laser à 600 mW, on mesure une force de piégeage de 85 pN. Comment se comparent cette mesure et celle de la question précédente avec les prédictions théoriques présentées figure $3b$?

2. Dans la même série d'expériences, les chercheurs ont collé sur un globule rouge sphérique deux billes de silice en des points diamétralement opposés. Un dispositif optique permet dans ce cas de dédoubler le piège en commutant rapidement entre deux positions F_1 et F_2 le point de convergence du faisceau laser et donc de piéger simultanément les deux billes. Pour une puissance donnée du laser, on éloigne alors lentement F_2 de F_1 jusqu'à ce qu'une des billes quitte son piège. La figure $4a$ présente l'aspect du globule rouge non déformé et la figure $4b$ son aspect juste avant ce décrochage pour une puissance de 190 mW. En déduire un *ordre de grandeur* de la constante élastique μ du globule rouge sachant qu'une force F qui étire un globule rouge sphérique entraine une diminution Δd du diamètre orthogonal à F_1F_2 de $\Delta d = F/(2\pi\mu)$. (La constante μ permet de relier les déformations d'un milieu incompressible aux contraintes qu'il subit.)



a)

b)

Figure 4

* *
*